Physique Générale : Mécanique

08.02: Mouvement central en $1/r^2$, mouvement des planètes

Sections
SC, GC & SIE , BA1

Version du 28.12.2024

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

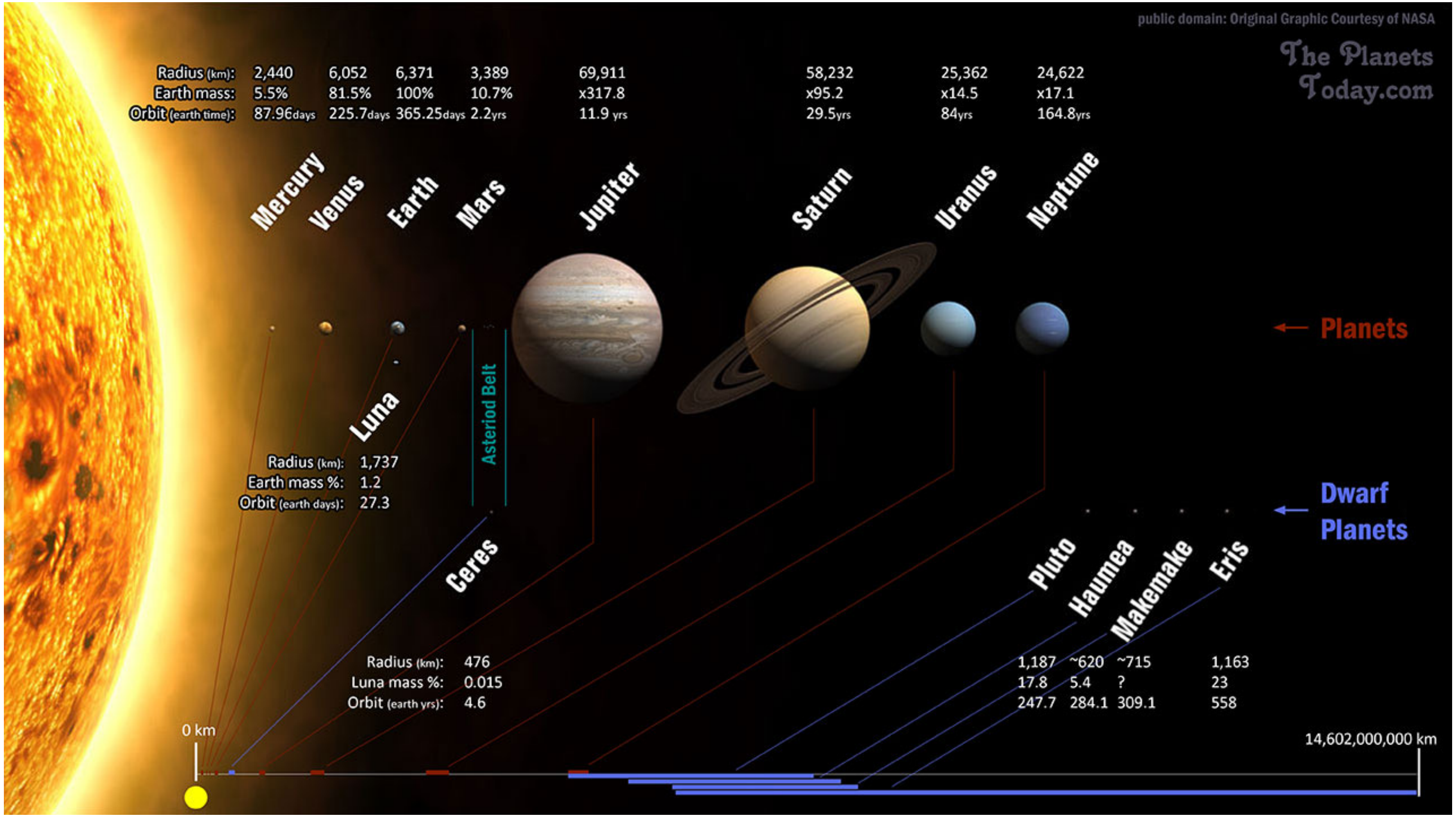
Swiss Plasma Center

Aujourd'hui

- Mouvement central: bref rappel
- Démarche historique .vs. approche adoptée ici
- Ellipse en coordonnées polaires
- Mouvement central en $1/r^2$

- Equations du mouvement
- Solutions
- Conservation de l'énergie
- Potentiel effectif
- Lois de Kepler

Le système solaire



■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

EPFL

	Sun	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune
Mass in Yg (1 Yg = 10^21 kg)	1,989,100,000	330.2	4,868.5	5,974.2	641.85	1,899,000	568,460	86,832	102,430
Mass relative to earth	332837	0.06	0.88	1	0.11	319	95	15	17
Radius in km	696000	2439.7	6051.9	6372.8	3402.5	68366	60268	25559	24622
Gravity on equator	274	3.7	8.9	9.8	3.7	24.8	10.4	8.9	11.1
Gravity relative to earth	28	0.38	0.90	1	0.38	2.54	1.06	0.90	1.1
Distance to sun in AE (1 AE = distance sun-earth	0	0.3 - 0.4	0.7	1	1.4 - 1.7	4.9 - 5.4	9.0 - 10.0	18.3 - 20.1	29.8 - 31.3

Mass in Yg
Mass relative to earth
Radius in km
Gravity on equator

Group	Moon	Mass in Yg	Mass relative to earth	Radius in km	Gravity on equator
Earths moon	Moon	73.5	1.2 %	1737	1.6
Mars' moons	Phobos	-	-	11.1	-
Mars' moons	Deimos	-	-	6.3	-
Jupiters moons	Ganymede	148.2	2.5 %	2631	1.4
Jupiters moons	Callisto	107.6	1.8 %	2410	1.2
Jupiters moons	Io	89.3	1.5 %	1821	1.8
Jupiters moons	Europa	48.0	0.8 %	1561	1.3
Saturns moons	Titan	134.5	2.3 %	2576	1.4
Saturns moons	Rhea	2.3	0.04 %	764	0.3
Saturns moons	Iapetus	2.0	0.03 %	736	0.2
Saturns moons	Dione	1.1	0.02 %	562	0.2
Uranus' moons	Titania	3.5	0.06 %	789	0.4
Uranus' moons	Oberon	3.0	0.05 %	761	0.3
Uranus' moons	Ariel	1.4	0.02 %	579	0.3
Uranus' moons	Umbriel	1.2	0.02 %	585	0.2
Neptunes moon	Triton	21.5	0.4 %	1353	0.8

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Mouvement central de centre O: résumé.

- L' accélération est parallèle au vecteur position
- Le moment cinétique $\vec{L}_0 = m\,(\vec{r} \wedge \vec{v})$ est une constante du mouvement
- Le mouvement est plan
- $|(\vec{r} \wedge \vec{v})| = \dfrac{|\vec{L}_O|}{m} = r^2\dot{\theta} = C = 2\dot{A}_O$ cste du mouvement
- L'accélération radiale est: $a_r = \ddot{r} - \dfrac{C^2}{r^3}$
- Si le mouvement est périodique de période T et que la trajectoire couvre une surface S, alors:

$$|C| = \frac{2S}{T}$$

- L'accélération radiale s'écrit aussi (Binet):

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$$

Tycho-Brahé, Képler, Newton ($16^{ième}$-$17^{ième}$ siècle):

Observation du mouvement des planètes $\Rightarrow$ lois de Képler:

- **1ère loi de Kepler:**
  Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un foyer.

- **2ième loi de Kepler:**
  Le rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixe.

- **3ième loi de Kepler:**
  T^2/a^3 *est une constante, où T est la période de révolution et a le demi grand-axe de l'ellipse*

$\Rightarrow$ déduction de la forme de la force (en $1/r^2$)
$\Rightarrow$ théorie de la gravitation universelle (Newton)

- **SC + SIE + GC : 21ième siècle:**

Nous allons procéder de manière exactement inverse:

- Nous assumerons que nous connaissons la forme de la force, et en particulier sa dépendance en $1/r^2$,
- nous en déduirons que la trajectoire des planètes est elliptique, en montrant que le rayon vecteur peut être mis sous la forme

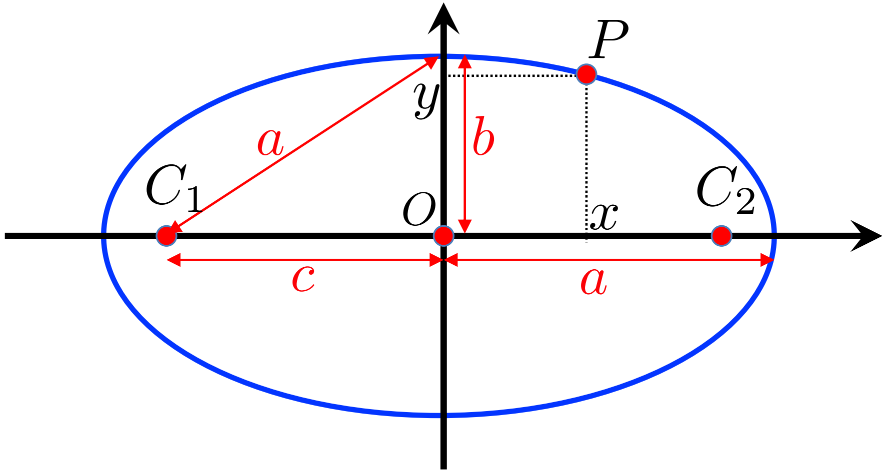
$$\boxed{\frac{p}{r(\theta)} = (1 + e\cos\theta)}$$

- nous vérifierons que les autres lois de Képler sont satisfaites.

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Ellipse en coordonnées cartésiennes, équation paramétrique

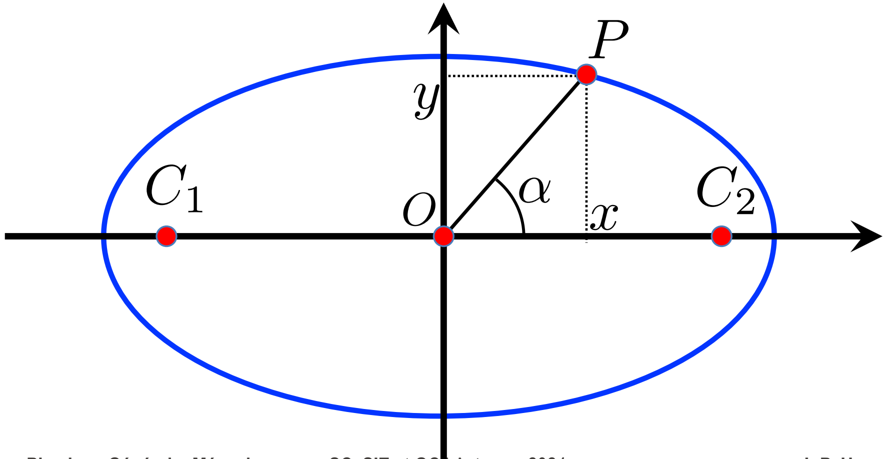


Lieu géométrique des points P tels que

$$\overline{C_1 P} + \overline{PC_2} = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 - b^2 = c^2$$

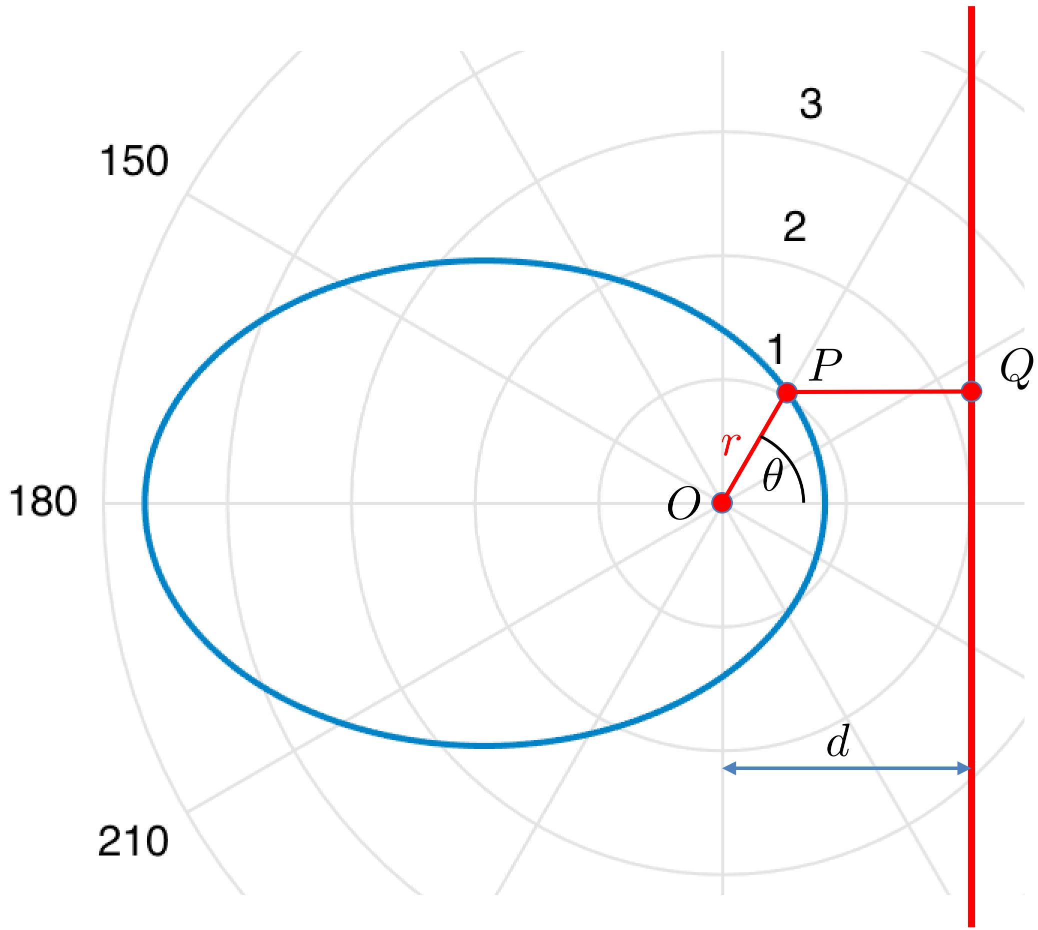


$$x = a \cos \alpha$$
$$y = b \sin \alpha$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Ellipse en coordonnées polaires



Lieu géométrique des points tels que

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = e \qquad 0 < e < 1$$

e : excentricité

$$\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = e = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

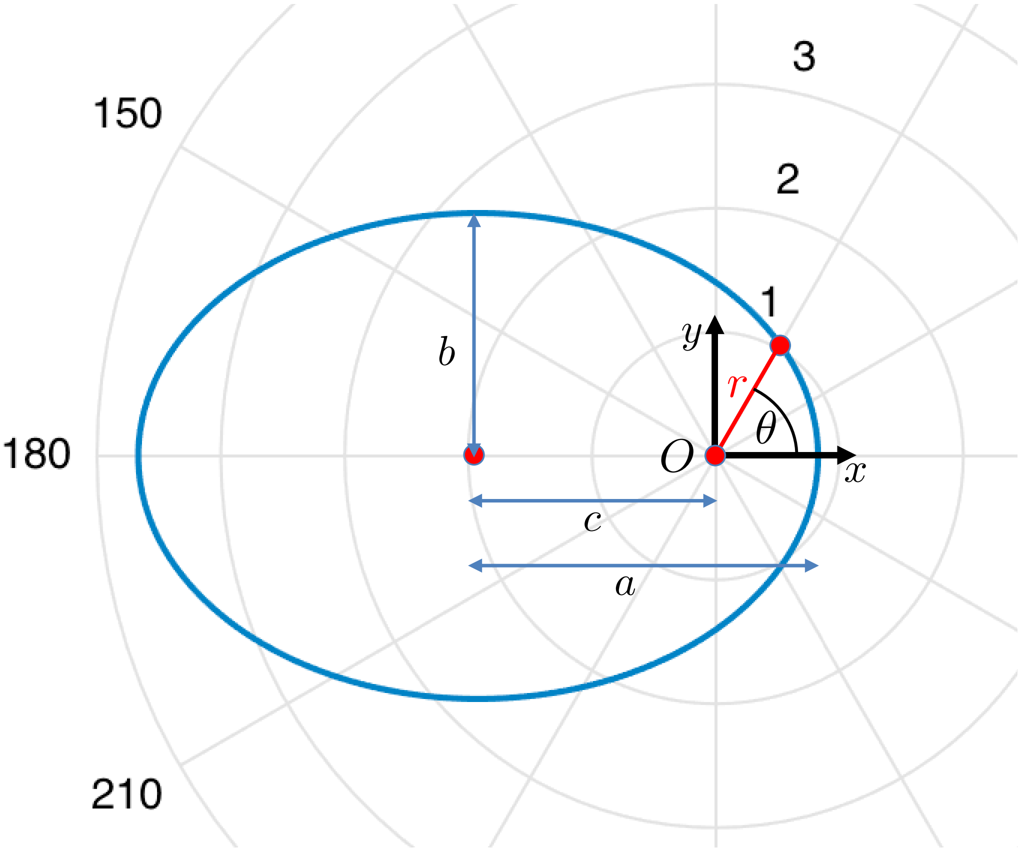
$$r(1 + e\cos\theta) = ed$$

$$\boxed{\frac{p}{r} = (1 + e\cos\theta)}$$

$$p = ed$$

Ellipse en coordonnées polaires et cartésiennes

$$\frac{p}{r} = (1 + e\cos\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Utiliser les relations entre coordonnée cartésiennes et polaires:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\cos\theta$$

Remplacer dans l'équation en coordonnée polaires.

…

Identifier a,b, et c

Ellipse: relation entre (e,p) et (a,b)

On remplace $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $x = r\cos\theta$ dans $r(1 + e\cos\theta) = p$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + xe = p \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = p - ex$$

On élève au carré:

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 - 2pex + e^2x^2 \Rightarrow x^2(1-e^2) + 2pex + y^2 = p^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\frac{pe}{(1-e^2)}x + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{p^2}{(1-e^2)}$$

On ajoute un terme à gauche et à droite un terme pour faire apparaître un carré parfait en x

$$\Rightarrow x^2 + 2\frac{pe}{(1-e^2)}x + \color{red}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{p^2}{(1-e^2)} + \color{red}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{pe}{(1-e^2)}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{p^2}{(1-e^2)} + \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}$$

Ellipse: relation entre (e,p) et (a,b)

On divise par $\frac{p^2}{(1-e^2)^2}$

$$\frac{\left(x+\frac{pe}{(1-e^2)}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{\frac{y^2}{(1-e^2)}}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}}=\frac{\left(x+\frac{pe}{(1-e^2)}\right)^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)}}=1$$

On identifie:

$$a^2=\frac{p^2}{(1-e^2)^2}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{a=\frac{p}{(1-e^2)}}$$

$$b^2=\frac{p^2}{(1-e^2)}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}$$

$$\boxed{c=\frac{pe}{(1-e^2)}}$$

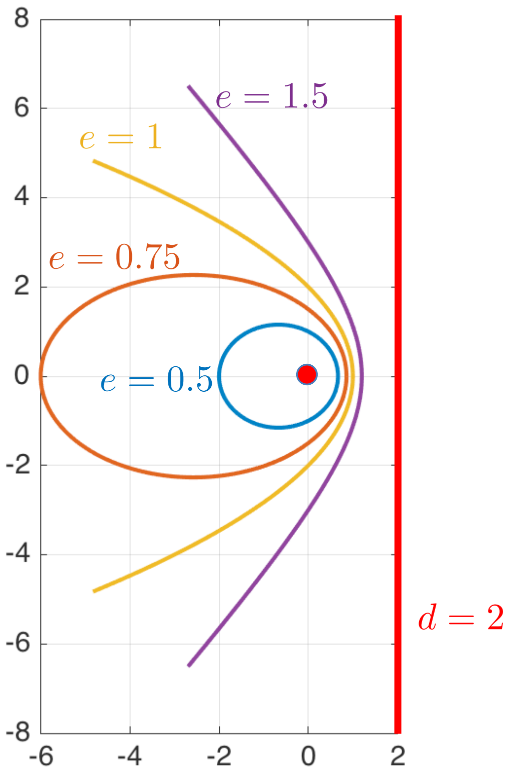
Les coniques en général

- La description de l'ellipse en fonction de l'excentricité e et du paramètre p=ed peut être étendue à d'autres côniques en fonction de l'excentricité.

$$\frac{p}{r} = (1 + e\cos\theta)$$

$$p = ed$$

$$\begin{cases} e = 0 & \text{cercle} \\ 0 < e < 1 & \text{ellipse} \\ e = 1 & \text{parabole} \\ 1 < e < \infty & \text{hyperbole} \\ e = \infty & \text{droite} \end{cases}$$



De manière générale, une courbe cônique est définie par deux paramètres: (e,p), ou (a,b)

avec les relations:

$$\boxed{a = \frac{p}{|1-e^2|}} \qquad \boxed{b = \frac{p}{\sqrt{|1-e^2|}}}$$

ou leurs inverses:

$$\boxed{p = \frac{b^2}{a}} \qquad \boxed{e^2 = 1 \pm \frac{b^2}{a^2}}$$

+: hyperbole
- : ellipse

Mouvement central en 1/r2

- On admet que la force est de la forme:

$$\vec{F} = F_r\,\hat{\vec{e}}_r = -m\frac{\chi}{r^2}\,\hat{\vec{e}}_r \qquad \chi : \text{cste}$$

>0 : force attractive
<0 : force répulsive

Note: Nous savons déjà que si F est la force de gravité, alors $\chi = MG$

- Comme le mouvement est central, les propriétés vues au chapitre précédent sont valables:
  - Le moment cinétique est constant $|(\vec{r}\wedge\vec{v})| = \frac{|\vec{L}_O|}{m} = r^2\dot{\theta} = C = 2\dot{A}_O$
  - Le mouvement est plan
  - La vitesse aérolaire $\dot{A}_O$ est constante
  - L'accélération radiale est $a_r = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}$
  - La formule de Binet relie l'accélération radiale aux paramètres de la trajectoire $a_r = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]$

⚠ L'approche du mooc (13.2) est identique, mais les notations adoptées sont différentes (

Mouvement central en 1/r2 : Démarche

- Ecrire l'équation de Newton (en coordonnées polaires, composante radiale)
- Utiliser la formule de Binet (qui relie l'accélération radiale à $r(\theta)$)
- Utiliser les propriétés du mouvement radial (constance du moment cinétique)
- Faire un changement de variable approprié qui permettra d'identifier une équation différentielle du second degré dont la solution est bien connue.
- Faire le changement de variable inverse
- Identifier que la solution $r(\theta)$ a la forme d'une elllipse

$$\frac{p}{r(\theta)} = (1 + e\cos\theta) \qquad \text{où} \qquad p, e = \text{cste}$$

Mouvement central en 1/r2: Newton

- L'équation de Newton projetée sur **e**$_r$ s'écrit, en tenant compte de la formule de Binet:

$$m\, a_r = -m\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = -m\frac{\chi}{r^2}$$

$$C = \frac{L_O}{m} \qquad \Longrightarrow \left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = \frac{m^2\,\chi}{L_O^2}$$

- Elle est de la même forme que l'équation de la dynamique d'une masse m pendue au bout d'un ressort de raideur k ($\Longrightarrow$ oscillateur harmonique)

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}x+\frac{k}{m}x\right] = g \qquad \text{où} \qquad t\rightarrow\theta \qquad x\rightarrow\frac{1}{r}$$

Mouvement central en 1/r2: Solution

- Pour trouver la solution de l'équation

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=\frac{m^2\chi}{L_O^2}$$

… il suffit d'avoir un oeil exercé. En effet, on pose:

$$\frac{1}{r(\theta)}=q(\theta) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2q(\theta)}{d\theta^2}=-q(\theta)+\frac{m^2\chi}{L_O^2}$$

… puis on effectue le changement de variable:

$$Q(\theta)=q(\theta)-\frac{m^2\chi}{L_O^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2Q(\theta)}{d\theta^2}=-Q(\theta)$$

Oscillateur Harmonique de pulsation 1

… et la solution générale est:

$$Q(\theta)=D\,\cos(\theta+\delta)$$

Dépendent des conditions initiales

Mvt central en 1/r2: Trajectoire elliptique

- A partir de $Q(\theta) = D\,\cos(\theta + \delta)$ on trouve

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{m^2\chi}{L_O^2} + D\,\cos(\theta + \delta)$$

On peut poser δ=0 sans perte de généralité

soit

$$\boxed{\frac{L_O^2/m^2\chi}{r(\theta)} = 1 + \frac{DL_O^2}{m^2\chi}\,\cos(\theta)}$$

Rappel: $\frac{p}{r(\theta)} = (1 + e\cos\theta)$

- On reconnaît l'équation d'une courbe cônique de paramètres

$$\boxed{p = \frac{L_O^2}{m^2\chi}} \qquad \boxed{e = \frac{DL_O^2}{m^2\chi}}$$

- Si $0 < D < \frac{m^2\chi}{L_O^2}$ alors la trajectoire est un ellipse!

A ce stade-là, il nous manque encore D pour connaître les paramètre de la cônique. D dépend des conditions initiales (position, vitesse) et il n'est pas évident de les relier aux paramètres de la cônique.

Nous connaissons une **constante du mouvement** (le moment cinétique L_O). Comme la force de gravitation est conservative (elle dérive d'un potentiel), alors **l'énergie mécanique** E_{mec} **est également constante** au cours de l'évolution.

Nous montrerons ensuite que si nous connaissons ces deux grandeurs, alors les paramètres de la cônique peuvent être déterminés.

$$(E_{\text{mec}}, L_O) \quad \Longleftrightarrow \quad (e, p) \quad \text{ou} \quad (a, b)$$

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Constance de l'énergie mécanique

Nous avons vu (voir 'Puissance-Travail-Energie') que:

- Une force qui dérive d'un potentiel est conservative
- Si toutes les forces qui agissent sur un système sont conservatives, alors l'énergie mécanique

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}$$

est une constante du mouvement.

- L'énergie cinétique se calcule à partir de la vitesse en coordonnées cylindriques.

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta$$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta)\cdot(\dot{r}\,\hat{\vec{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\vec{e}}_\theta) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_O^2}{2mr^2}}_{r^2\dot{\theta}=C=\frac{L_O}{m}}}$$

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

Constance de l'énergie mécanique

- Pour l'énergie potentielle, on tire parti du fait que le force est centrale (ne dépend que de r)

$$\vec{F} = F_r\,\hat{\vec{e}}_r = -m\frac{\chi}{r^2}\,\hat{\vec{e}}_r = -m\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\chi}{r}\right)\,\hat{\vec{e}}_r = -\nabla(E_{\text{pot}})$$

$$\boxed{E_{\text{pot}} = -m\frac{\chi}{r}}$$

- L'énergie mécanique est donc:

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - m\frac{\chi}{r} = E_0 = \text{cste}$$

- Par commodité on pose

$$\boxed{\frac{E_{\text{mec}}}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2m^2r^2} - \frac{\chi}{r} = \frac{E_0}{m} = K = \text{cste}}$$

⚠ La grandeur K utilisée ici (énergie mécanique/m) n'est pas la même que celle du mooc 13.2

Détermination des paramètres de la trajectoire

- Montrons que la connaissance des constantes du mouvement
  - énergie mécanique (K, à un facteur de masse près)
  - moment cinétique L_O

  permet de déterminer les paramètres de la trajectoire du point matériel.

- Ingrédients:

Equation d'une cônique: $$\frac{p}{r} = 1 + e\,\cos\theta \qquad ①$$

Constante des aires: $$C = \frac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta} \qquad ②$$

Paramètre de la cônique: $$p = \frac{L_O^2}{m^2\chi} = \frac{C^2}{\chi} \qquad ③$$

Energie mécanique constante: $$\left[\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\chi}{r}\right] = K = \text{cste} \qquad ④$$

- Démarche: on exprime $\dot{r}$ et r puis on remplace dans ④.

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Détermination des paramètres de la trajectoire

- Commençons par

$$\dot{r}(\theta) = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \underset{②}{=} \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \underset{①}{=} \frac{Ce}{p}\sin\theta$$

$$\dot{r}^2 = \frac{C^2e^2}{p^2}\sin^2\theta \qquad ⑤$$

- On exprime $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ à partir de ①:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1+e\cos\theta) \qquad ⑥ \qquad\qquad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{p^2}(1+e\cos\theta)^2 \qquad ⑦$$

- ⑤, ⑥, ⑦ dans ④:

$$\frac{C^2e^2}{2p^2}\sin^2\theta + \frac{C^2}{2p^2}\left[1+2e\cos\theta+e^2\cos^2\theta\right] - \underset{③}{\frac{C^2}{p^2}}\left[1+e\cos\theta\right] = K$$

$$\frac{C^2}{2p^2}\underbrace{\left(e^2\sin^2\theta + e^2\cos^2\theta + 1 - 2\right)}_{=e^2-1} = K$$

Détermination des paramètres de la trajectoire

- En simplifiant, et en utilisant ③ on obtient un système de deux équations à deux inconnues (e et p):

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{C^2}{2p^2}(e^2-1) & = & K \\ p & = & \dfrac{C^2}{|\chi|} \end{cases}}$$

qu'on peut si on le désire réécrire en fonction de L_O et/ou en explicitant les paramètres *a* et *b* de la conique plutôt que *e* et *p.*

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{L_O^2}{2m^2p^2}(e^2-1) & = & K \\ p & = & \dfrac{L_O^2}{m^2|\chi|} \end{cases}}$$

$$a = \frac{p}{|1-e^2|}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{|\chi|}{2a} & = & |K| \\ \dfrac{b^2}{a} & = & \dfrac{L_O^2}{m^2|\chi|} \end{cases}}$$

Il suffit de connaître les deux constantes du mouvement K et L_O pour déterminer les paramètres de la conique.

Type de trajectoire (cercle ellipse, parabole ou hyperbole)

[mooc 13.2]

- Le signe de K détermine la nature de la cônique:

$$\frac{C^2}{2p^2}(e^2-1)=K \qquad \begin{cases} K<0 & \rightarrow & e<1 & \rightarrow & \text{ellipse ou cercle} \\ K=0 & \rightarrow & e=1 & \rightarrow & \text{parabole} \\ K>0 & \rightarrow & e>1 & \rightarrow & \text{hyperbole} \end{cases}$$

- Si on revient à l'expression de l'énergie mécanique, on constate qu'elle prend une forme qui ne dépend que de r et de dr/dt. On peut donc réinterpréter les termes qui la constituent:

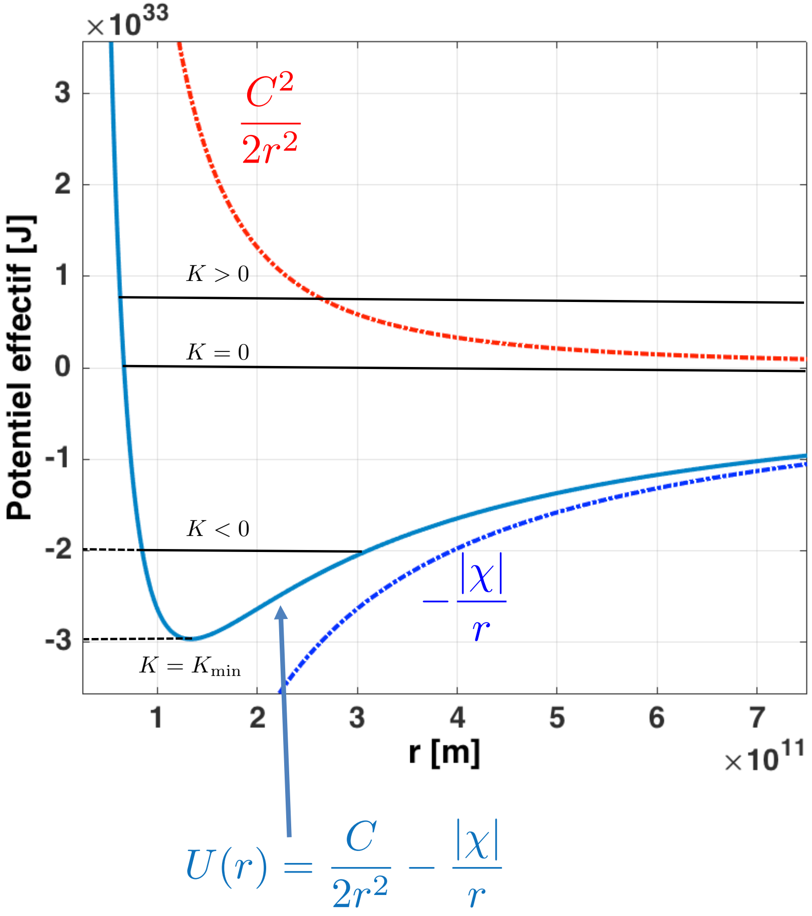
$$E_{\text{mec}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{Ce terme a la forme d'une énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{L_O^2}{2mr^2} - m\frac{\chi}{r}}_{\text{Ce terme a la forme d'une énergie potentielle 'effective' } E_{\text{pot eff}}} = mK = \text{cste}$$

- On réécrit sous une forme indépendante de m

$$\frac{E_{\text{mec}}}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2m^2r^2} - \frac{\chi}{r} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{C^2}{2r^2} - \frac{\chi}{r}}_{U(r)} = K = \text{cste}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) = K = \text{cste}}$$

Potentiel effectif



$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) = K = \text{cste}$$

$K = K_{\min}$

r ne varie pas: trajectoire circulaire

$K < 0$

r varie entre r_{min} et r_{max}: trajectoire elliptique

$K = 0$

$r_{max}= \infty$ trajectoire parabolique

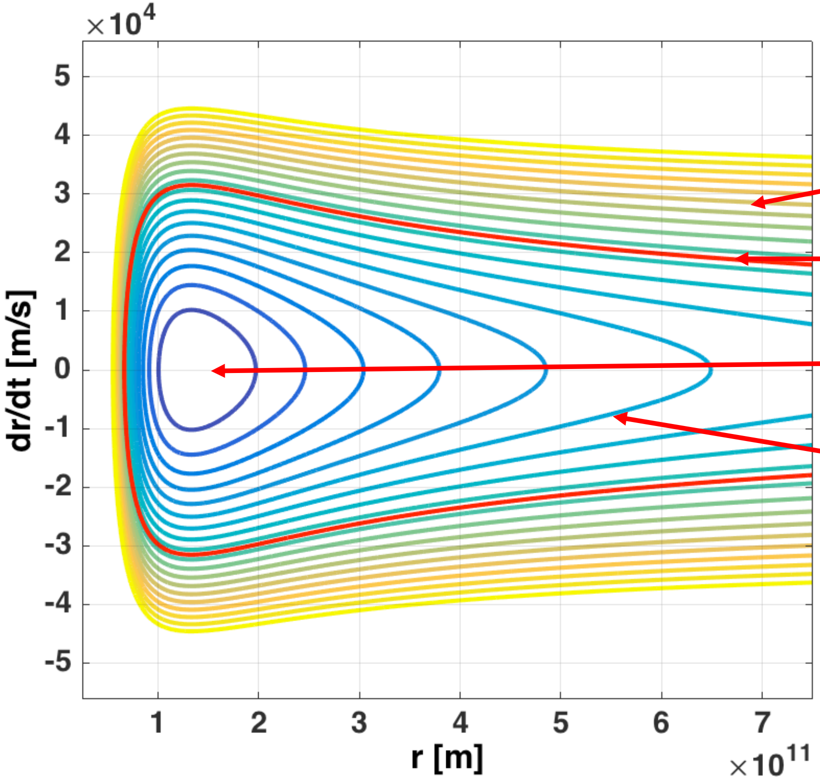
$K > 0$

Trajectoire hyperbolique

Portrait de phase

- Dans l'espace $(r, \dot{r})$ on trace les courbes $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) = K = \text{cste}$

Le système (e.g. planète, satellite, corps astral, comète) évolue sur une courbe K = cste.



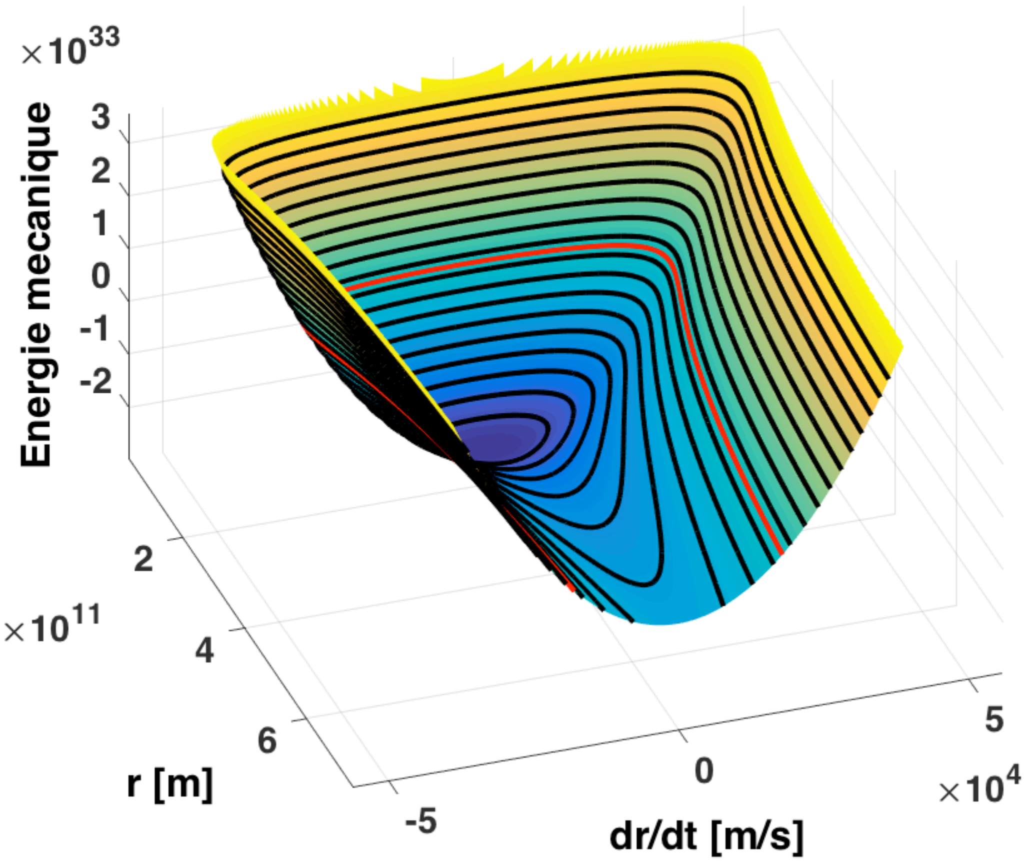
$K > 0$
Trajectoire hyperbolique

$K = 0$
r_{max} = ∞ trajectoire parabolique

$K = K_{\text{min}}$
r ne varie pas: trajectoire circulaire

$K < 0$
r varie entre r_{min} et r_{max}: trajectoire elliptique

Portrait de phase



- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

- Nous avons décrit le mouvement de points matériels soumis à des forces en $1/r^2$, c'est-à-dire à des potentiels en 1/r .
  Montrons que ceci est cohérent avec les lois de Kepler:

  - **1ère loi de Kepler:**
    Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un foyer.

    Nous l'avons démontré.

$$\frac{L_O^2/m^2\chi}{r(\theta)} = 1 + \frac{DL_O^2}{m^2\chi}\cos(\theta) \qquad \frac{C^2/\chi}{r(\theta)} = 1 + \frac{DC^2}{\chi}\cos(\theta)$$

  - **2ième loi de Kepler:**
    Le rayon vecteur balaie des aires égales en un temps fixe.

    C'est une conséquence de la conservation du moment cinétique

$$|(\vec{r} \wedge \vec{v})| = \frac{|\vec{L}_O|}{m} = r^2\dot{\theta} = C = 2\dot{A}_O = \text{cste}$$

- **3ième loi de Kepler:**
  T^2/a^3 *est une constante.*

On combine les formules $$\frac{b^2}{a} = \frac{L_O^2}{m^2|\chi|} = \frac{C^2}{\chi}$$

et $$C = 2\dot{A}_O = 2\frac{S}{T} = 2\frac{\pi ab}{T}$$

Ce qui donne: $$\frac{b^2}{a} = \frac{(2\pi ab)^2}{T^2\chi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{(2\pi)^2}{\chi} = \mathrm{cste}}$$

- L'équation d'une conique en coordonnées polaires est:

$$\frac{p}{r} = (1 + e\cos\theta) \qquad a = \frac{p}{|1-e^2|} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{|1-e^2|}}$$

$$p = \frac{b^2}{a} \qquad e^2 = 1 \pm \frac{b^2}{a^2}$$

- En partant de l'hypothèse que la force de gravité a une dépendance en $1/r^2$, on vérifie les lois de Kepler :
  - Les trajectoires des planètes sont elliptiques,
  - La vitesse aérolaire est constante,
  - La grandeur T^2/a^3 est une constantes (a: demi grand axe de l'ellipse, T: période de révolution)

- L'énergie mécanique est une constante du mouvement, au même titre que le moment cinétique:

$$E_{\text{mec}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2}}_{E_{cin}} \underbrace{- m\frac{\chi}{r}}_{E_{pot}} = mK = \text{cste}$$

Mouvement des planètes: résumé (2)

- On identifie un potentiel effectif:

$$\frac{E_{\text{mec}}}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) = K = \text{cste} \qquad U(r) = \frac{L_O^2}{2m^2r^2} - \frac{\chi}{r} = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\chi}{r}$$

- Le signe de l'énergie mécanique détermine le type de conique:

$$\begin{cases} K < 0 & \rightarrow & e < 1 & \rightarrow & \text{ellipse ou cercle} \\ K = 0 & \rightarrow & e = 1 & \rightarrow & \text{parabole} \\ K > 0 & \rightarrow & e = 1 & \rightarrow & \text{hyperbole} \end{cases}$$

Ex: planètes
Ex: satellite qui décolle
Ex: astéroïde

- La relation entre les paramètres de la conique et les constantes du mouvement est:

$$\begin{cases} \frac{C^2}{2p^2}(e^2-1) & = & K \\ p & = & \frac{C^2}{|\chi|} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{L_O^2}{2m^2p^2}(e^2-1) & = & K \\ p & = & \frac{L_O^2}{m^2|\chi|} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{|\chi|}{2a} & = & |K| \\ \frac{b^2}{a} & = & \frac{L_O^2}{m^2|\chi|} \end{cases}$$

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center